Introduzione all'Informatica

Loriano Storchi

loriano@storchi.org

http:://www.storchi.org/

STUDIO DI FUNZIONI

Fogli di calcolo

- Useremo il foglio di calcolo per fare una rappresentazione di funzione ed impostare un semplice studio di funzioni con calcolo numerico della derivata e dell’integrale

RICHIAMI DI BASE

Studio di funzioni

- Definizione di funzione: Una funzione e' una legge di corrispondenza che collega fra di loro gli elementi di due insiemi:

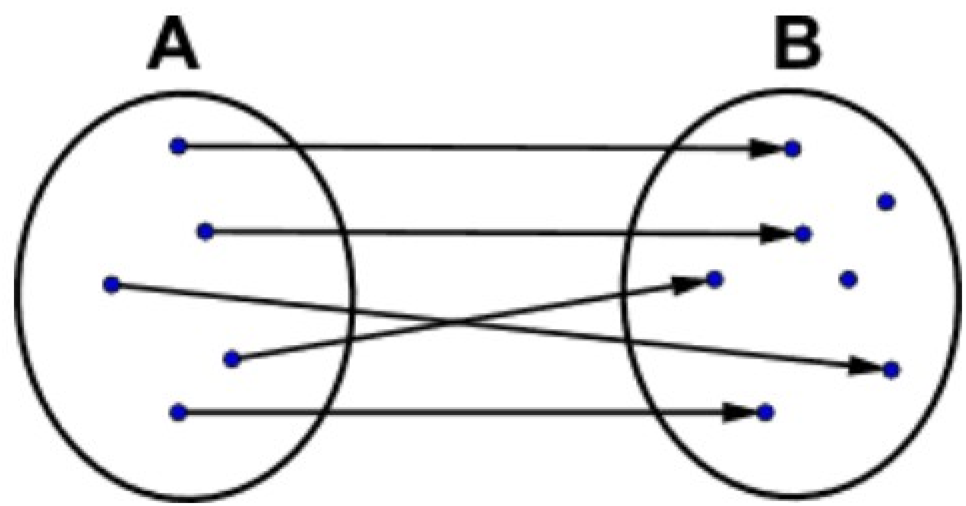
  $f : A \rightarrow B$

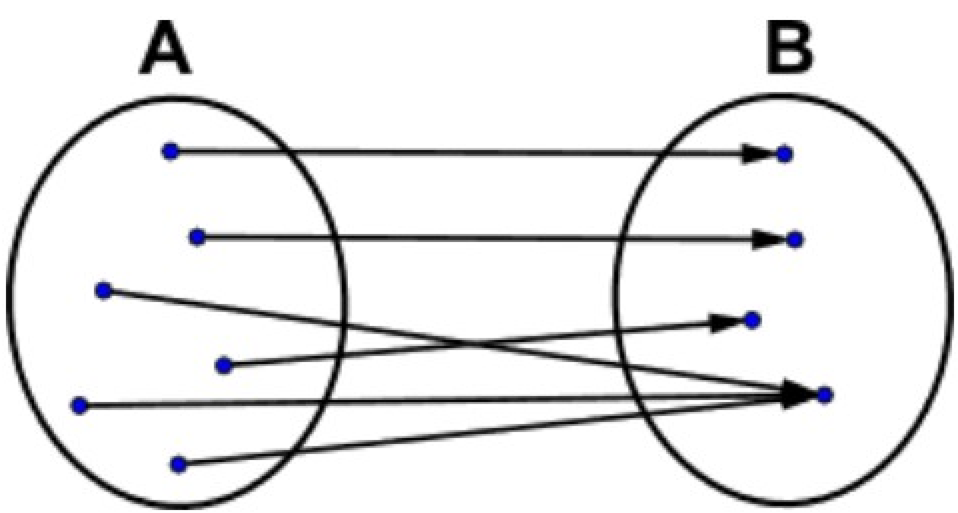
  e' una funzione se e solo se ad ogni elemento di A e' associato un solo elemento di B

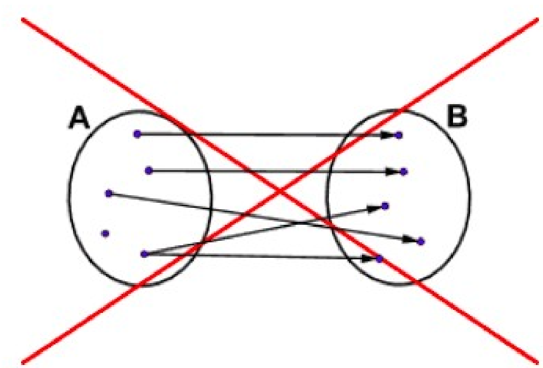
$$\forall a \in A \quad \exists !\, b \in B \quad \text{tale che} \quad f : a \rightarrow b$$

$$f(a) = b$$

Studio di funzioni





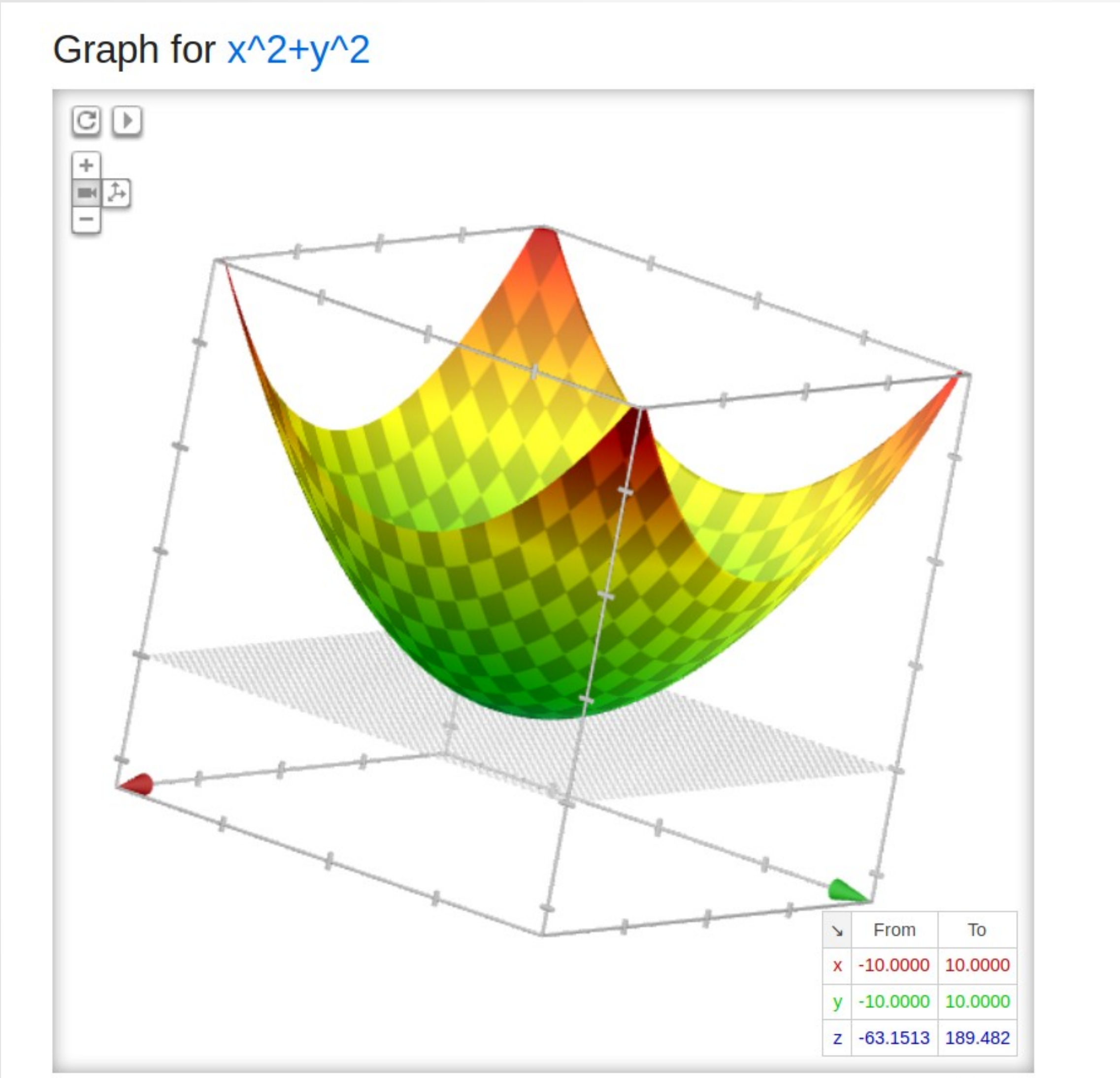


Studio di funzioni

- Chiamiamo l'insieme di partenza A **Dominio** e B **Codominio.** Il sottoinsieme degli elementi di B che vengono raggiunti mediante l’applicazione della funzione f si chiama invece **immagine della funzione e puo’ coincidere con il codominio** B
- Di nostro specifico interesse sono le funzioni reali a variabile reale

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad , \quad B = \mathbb{R} \text{ e } f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

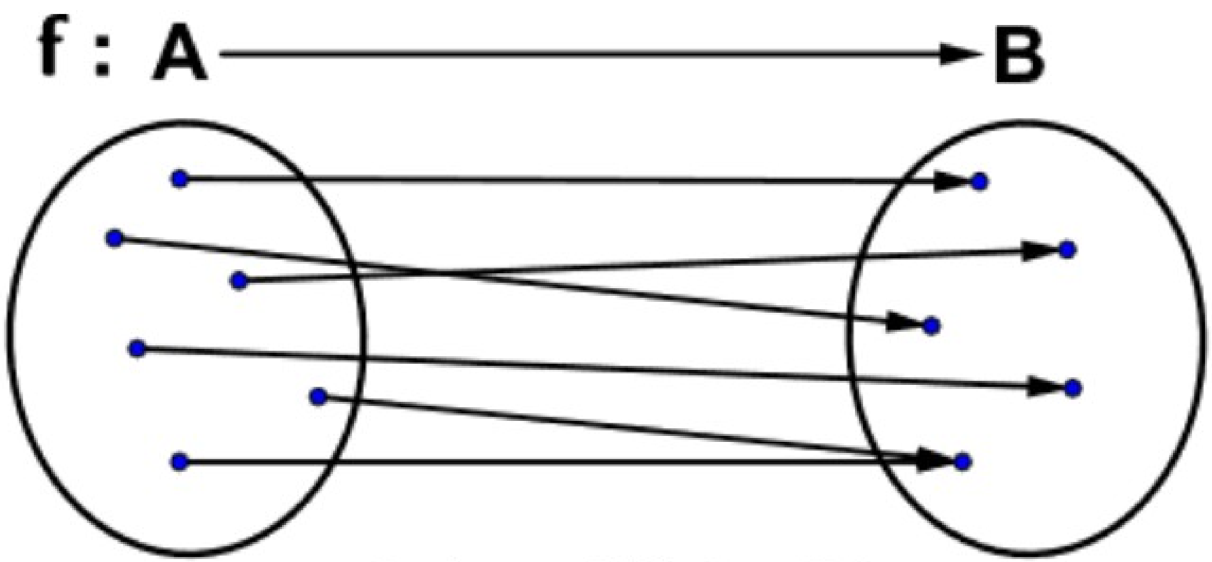
Studio di funzioni



Posso definire anche
Funzioni in R^n

Studio di funzioni

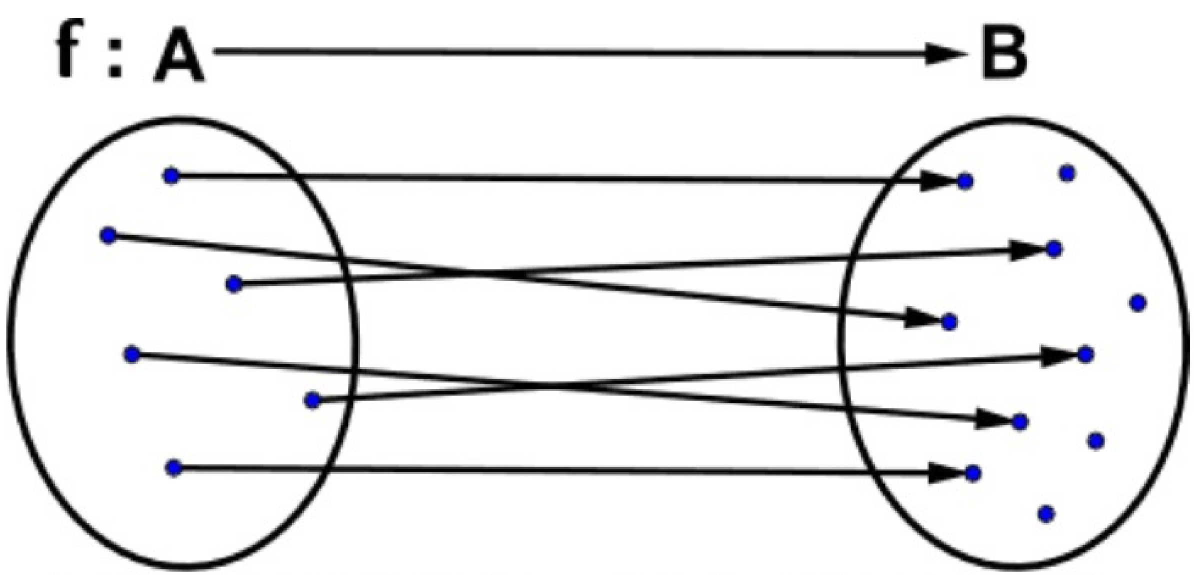
- Funzione **suriettiva** : ogni elemento del secondo insieme (B) e’ raggiunta da almeno “una freccia” che parte dal primo insieme (A)



Ogni punto dell'insieme B è raggiunto da almeno una freccia.
Però è possibile che più di due elementi di A puntino verso lo stesso elemento di B.

Studio di funzioni

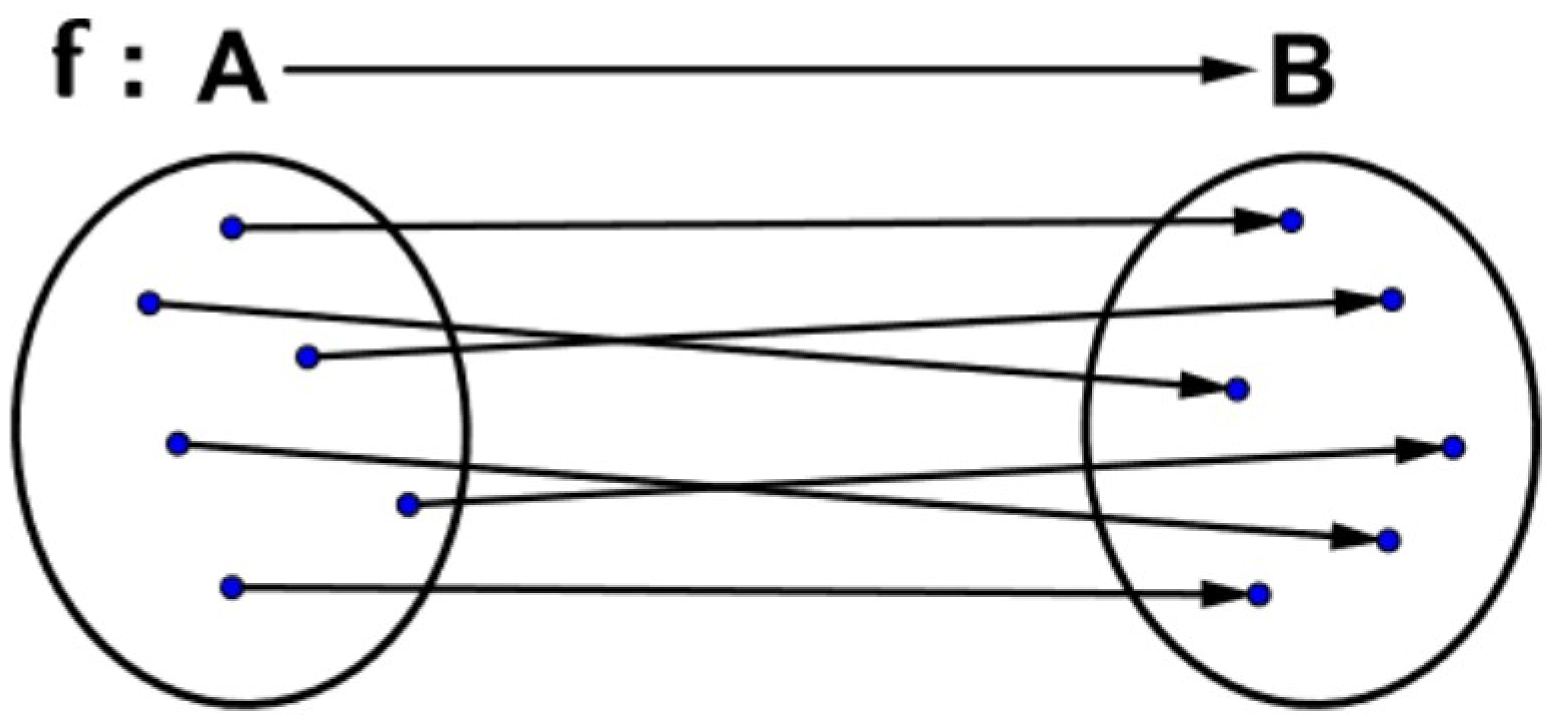
- Funzione **iniettiva** : se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte . Quindi ogni elemento dell’immagine in B non ammette piu’ di una preimmagine in A



Le immagini mediante f sono distinte, cioè ogni elemento di A punta ad un unico elemento di B.
Però è possibile che non tutti gli elementi di B vengano raggiunti.

Studio di funzioni

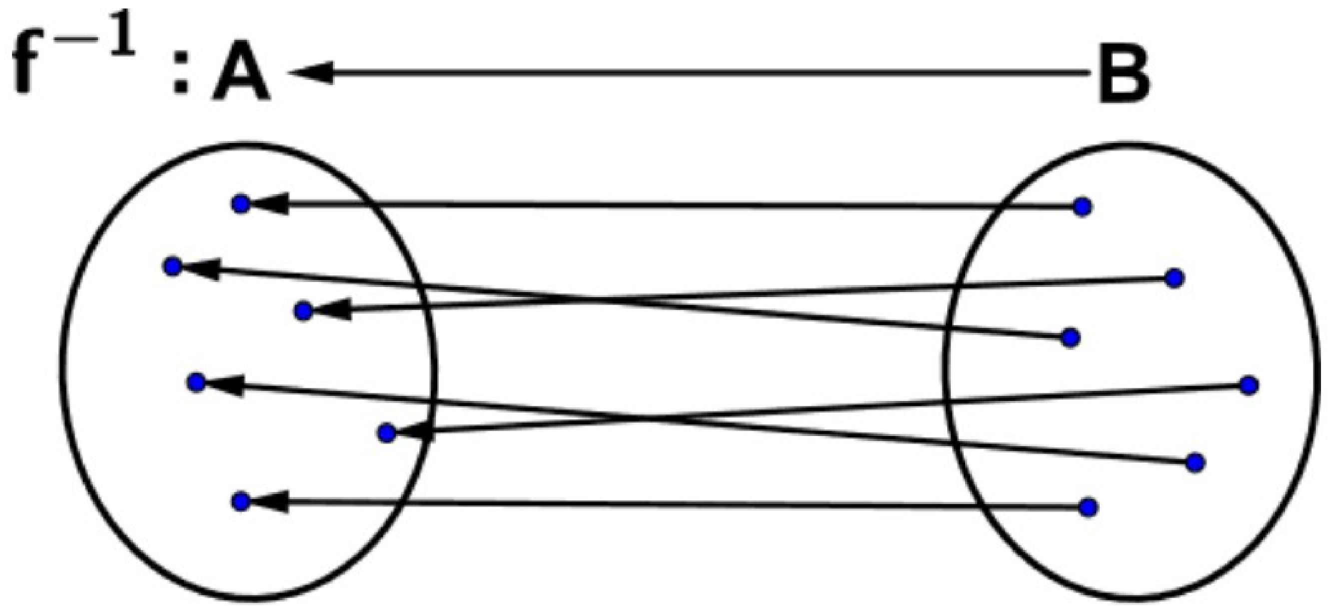
- Funzione **biettiva** : e' una funzione che e' sia suriettiva che iniettiva



f è sia iniettiva (ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B) che suriettiva (ogni elemento di B è raggiunto da una freccia)

Studio di funzioni

- Una funzione **biettiva** e' **invertibile** quindi e' possibile determinare una legge che “collega” gli elementi dell’immagine agli elementi di A

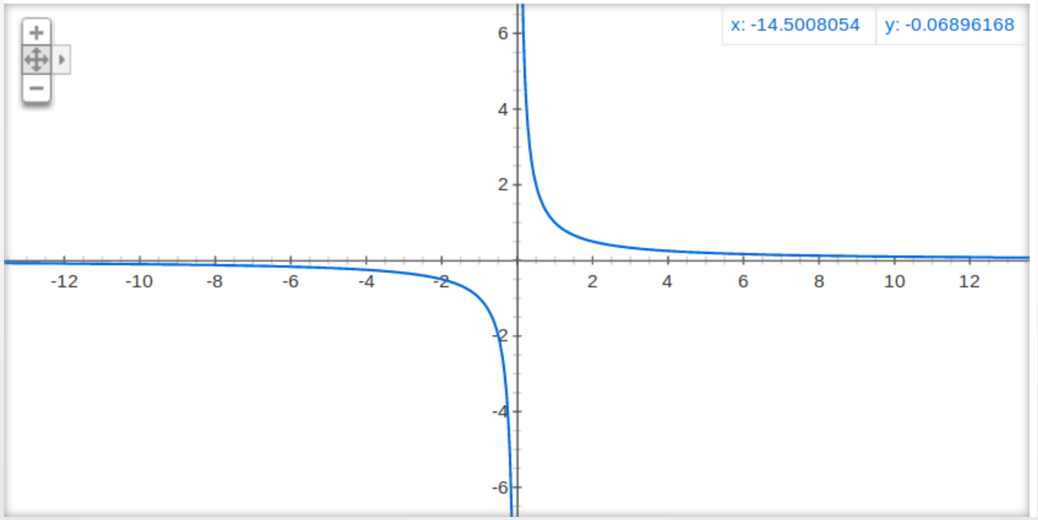


Invertendo le frecce otteniamo ancora una funzione
f^{-1} è sia iniettiva che suriettiva

DOMINIO

Studio di funzioni

- Il **dominio** di una funzione reale, detto anche insieme di esistenza, e' il sottinsieme di R in cui la funzione è definita
- Per determinare il dominio basta individuare gli intervallio i punti in cui la funzione non e' definita
- **Rapporti** → il dominio deve essere diverso da zero, ad esempio y = 1/x



Studio di funzioni

- **Logaritmi: l’esponente x da dare alla base a per ottenere l’argomento b**

$\log_a(b) = x$	$\begin{pmatrix} a \text{ è la base} \\ b \text{ è l'argomento} \\ x \text{ è il logaritmo in base } a \text{ di } b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a > 0 \wedge a \neq 1 \\ b > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

$\log_a(a) = 1$	$\log_a(1) = 0$	$a^x > 0$

Teorema del prodotto	
$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$	$\log_2(3\,x) = \log_2(3) + \log_2(x)$
Teorema del rapporto	
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$	$\log_2\left(\frac{x}{3}\right) = \log_2(x) - \log_2(3)$
Teorema della potenza	
$\log_a(b^c) = c \log_a(b)$	$\log_2\left(x^3\right) = 3 \log_2(x)$

Studio di funzioni

- **Esponente richiami**

2^(-2) =
0.25

0.5^(-2) =
4

1 / 4 =
0.25

$$3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$(-4)^{-2} = \left(\frac{1}{-4}\right)^2 = \frac{1^2}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$(\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4^(1 / 2) =
2

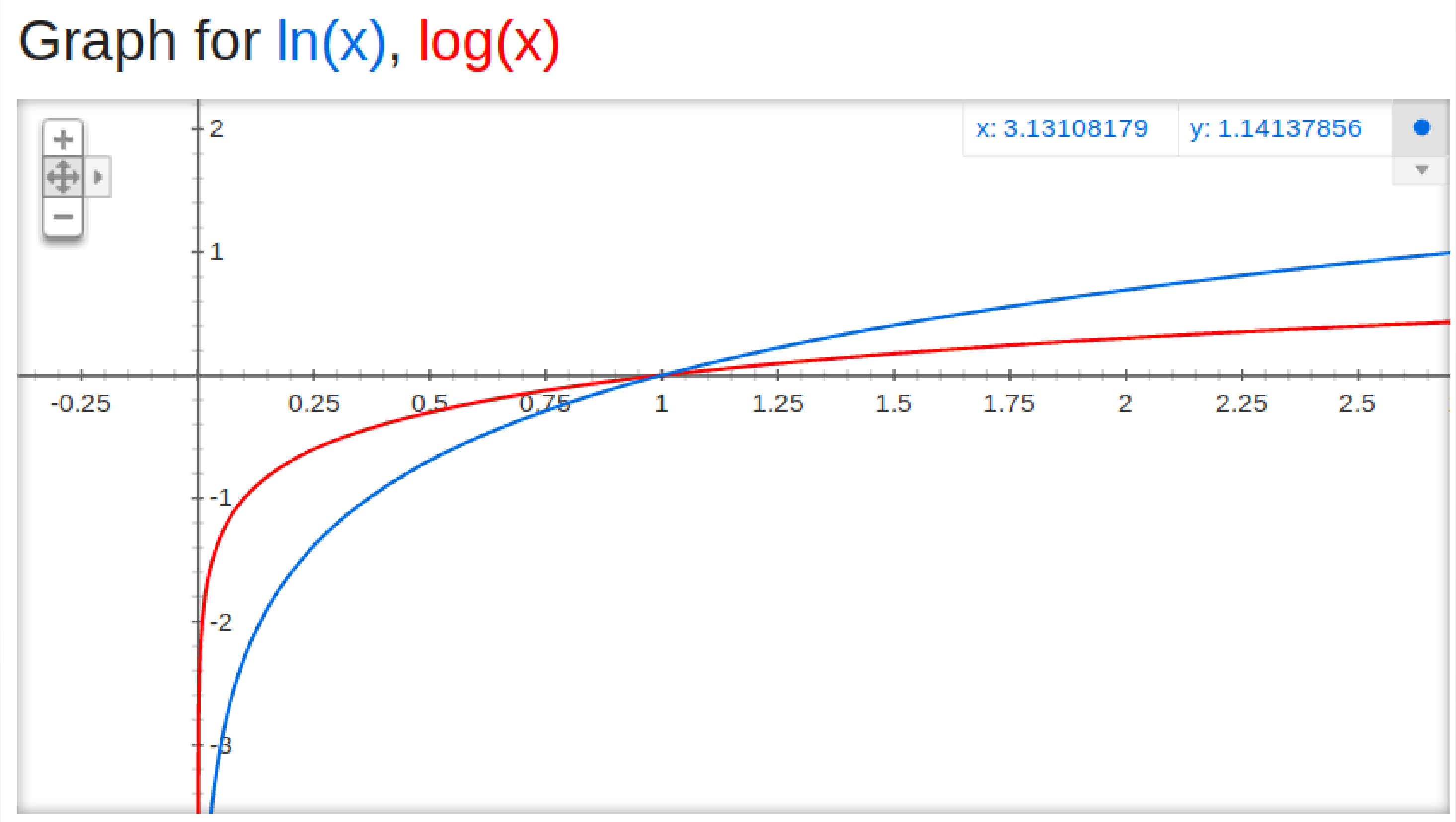
$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{25} = 5$$

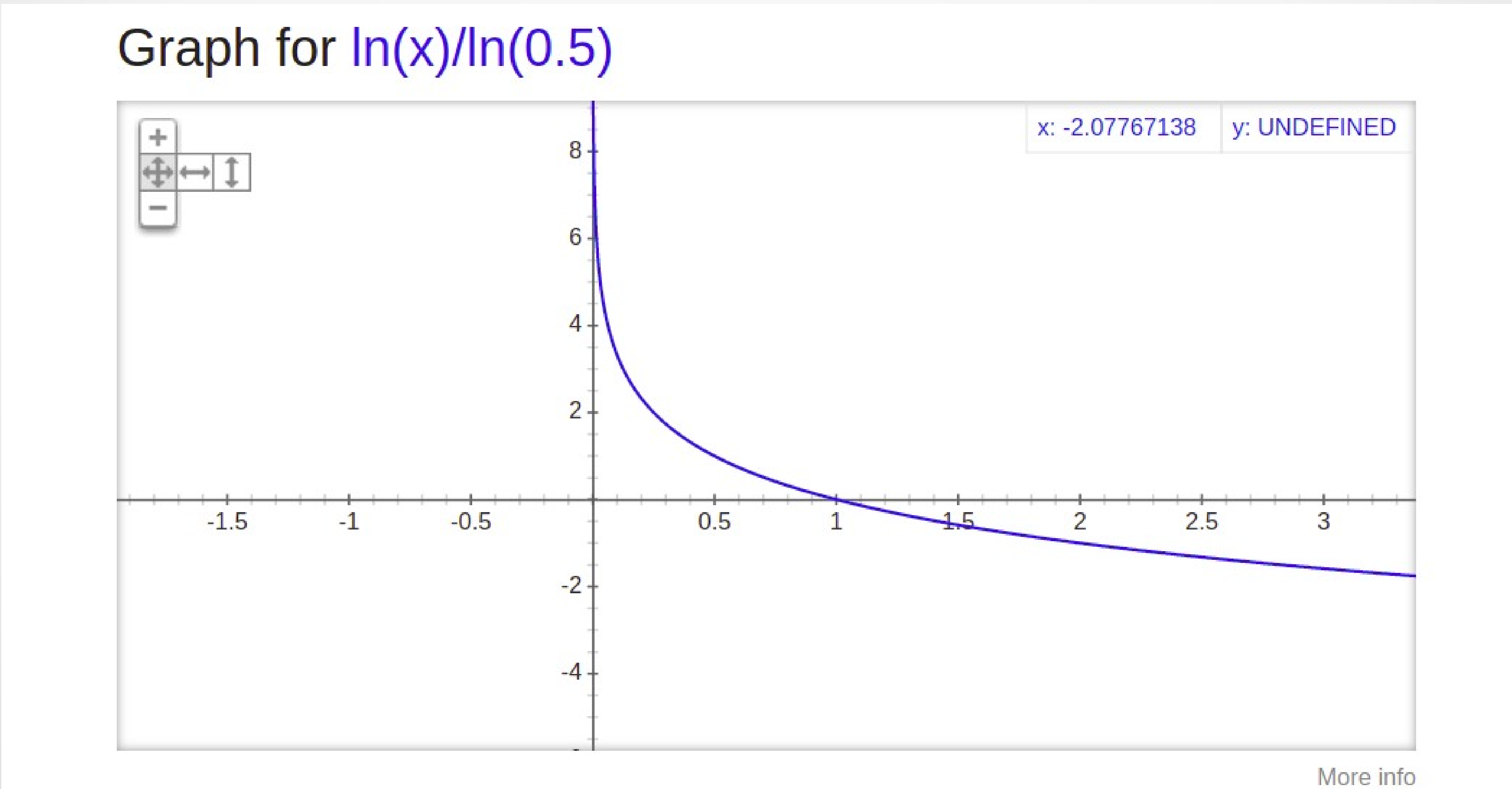
Studio di funzioni

- **Logaritmi** → l'argomento deve essere > 0 (la base deve essere maggiore di zero e diversa da 1)



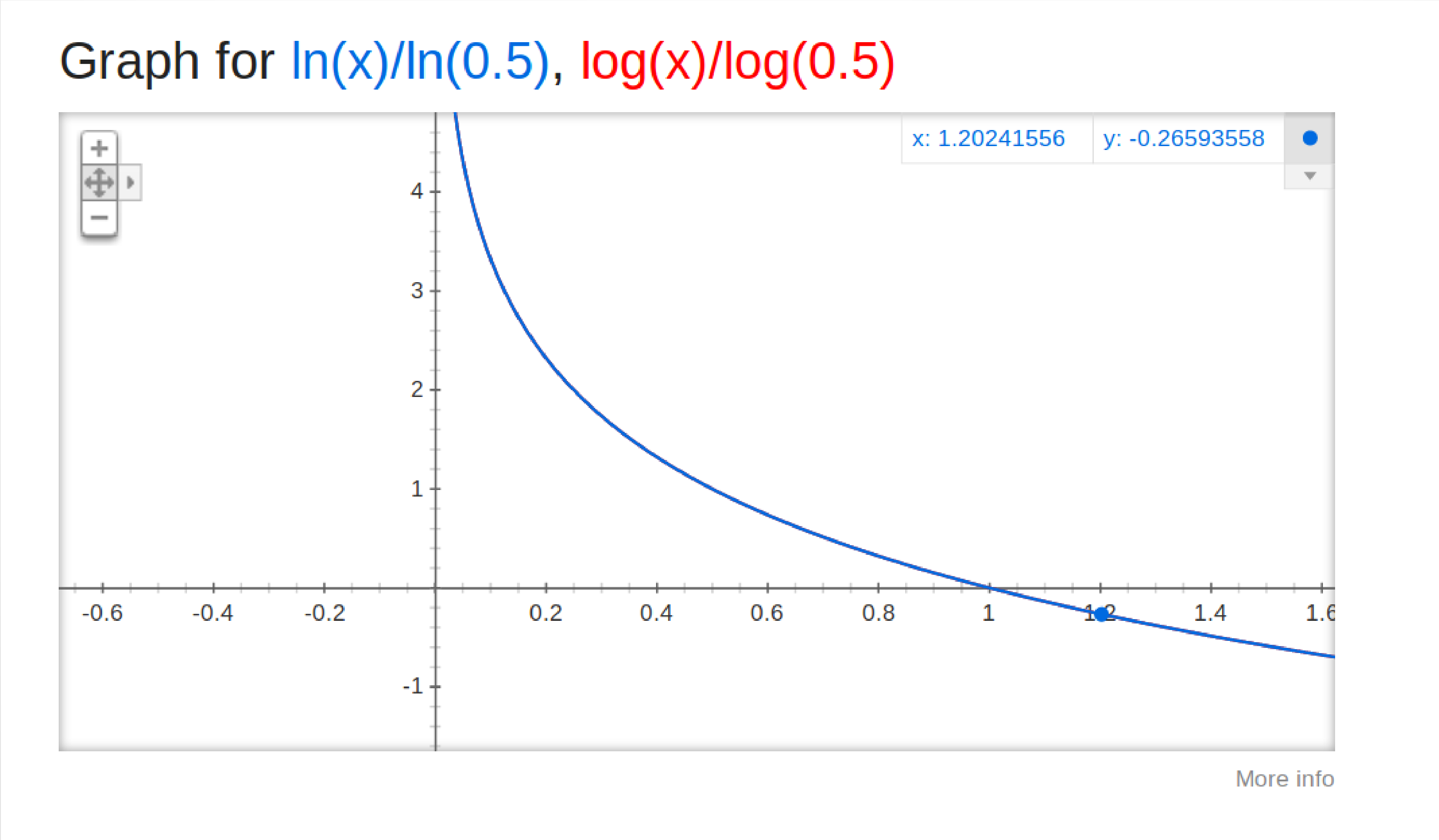
Studio di funzioni

- **Logaritmi** → regola del cambio di base $\log_b(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(b)}$



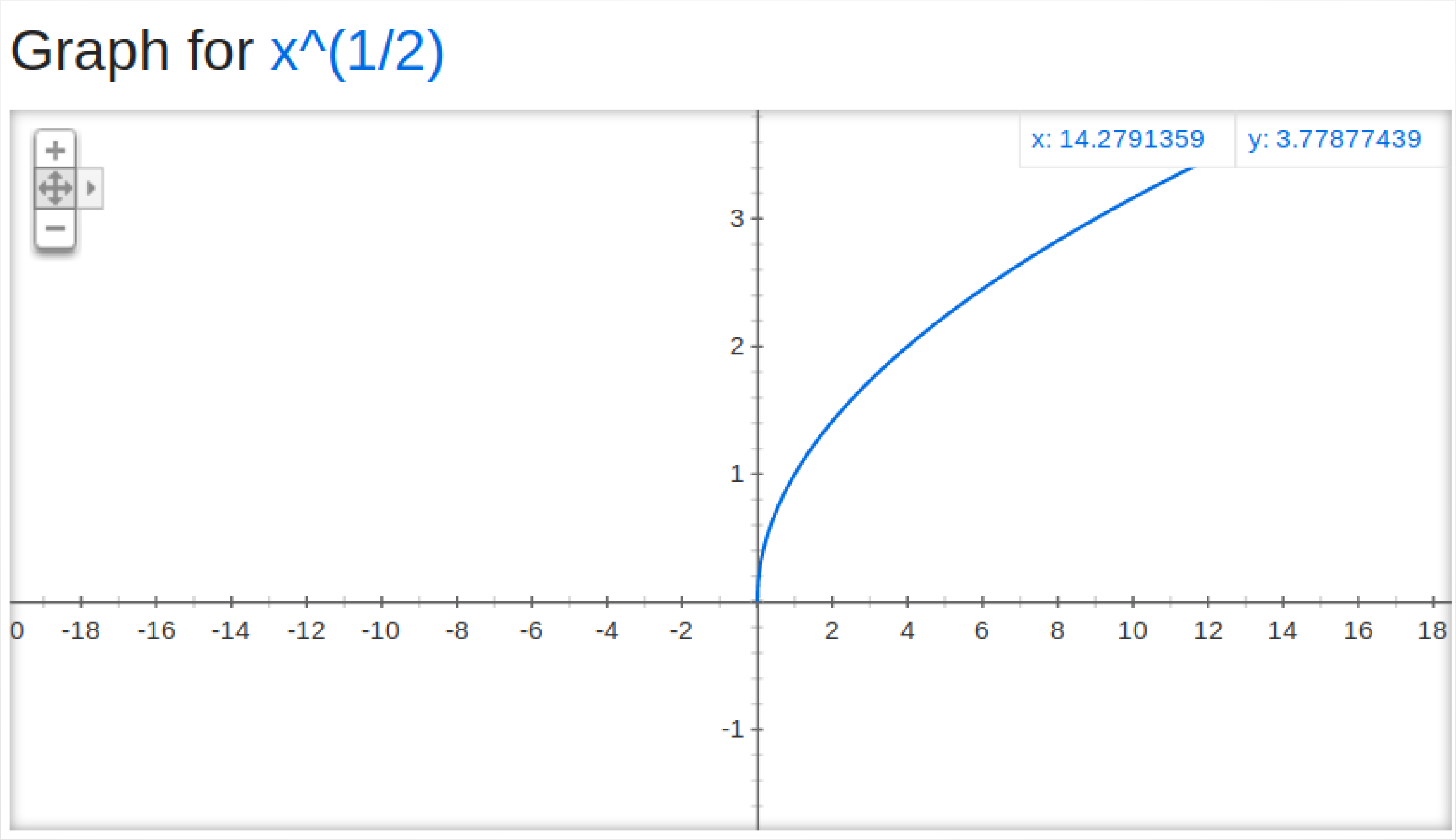
Studio di funzioni

- **Logaritmi** → regola del cambio di base $\log_b(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(b)}$



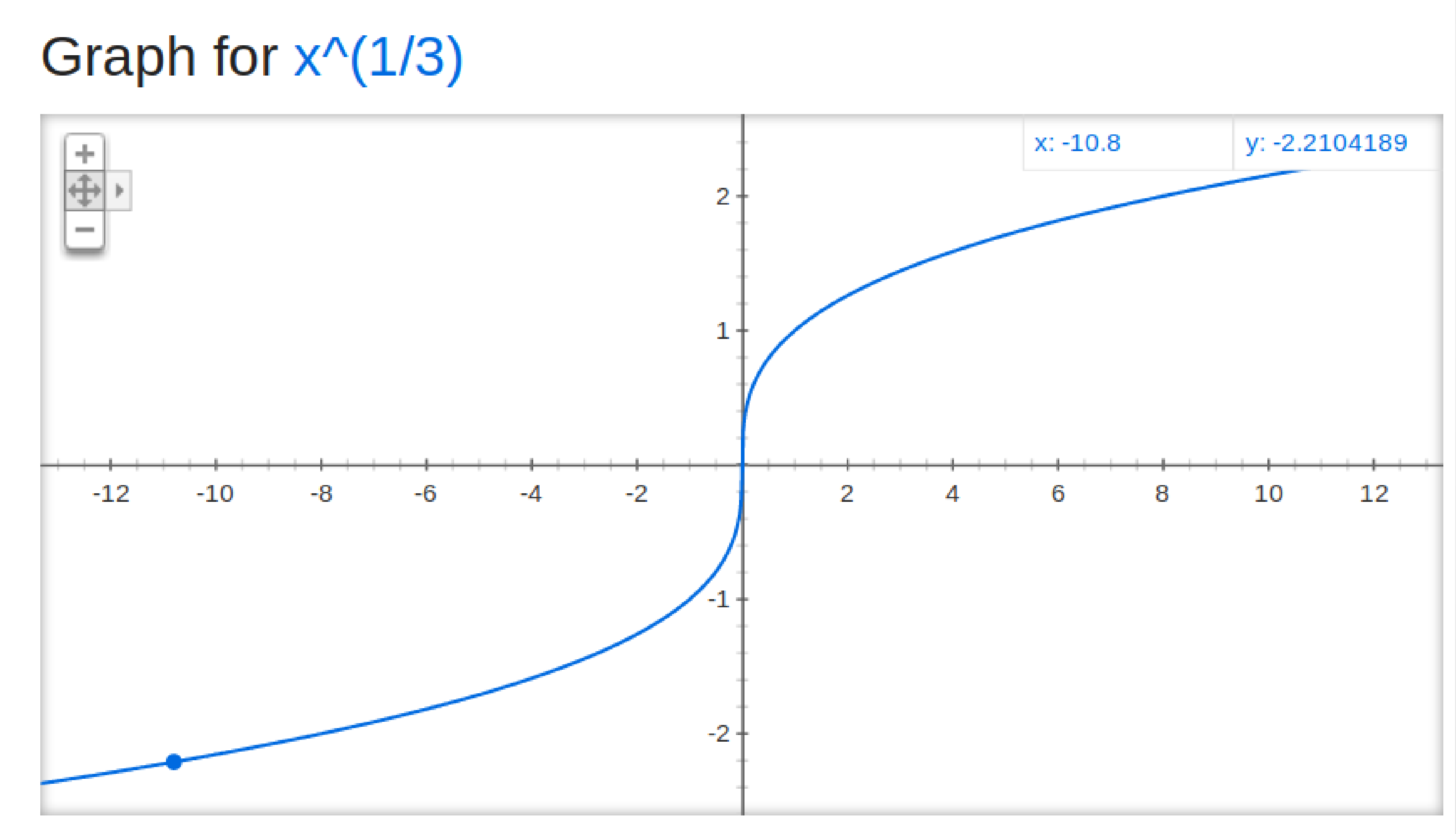
Studio di funzioni

- **radici** →radici con indice pari il radicando deve essere maggiore o uguale a zero



Studio di funzioni

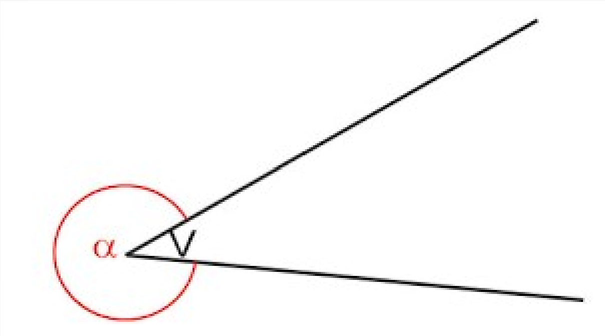
- **radici** → radici con indice dispari



FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

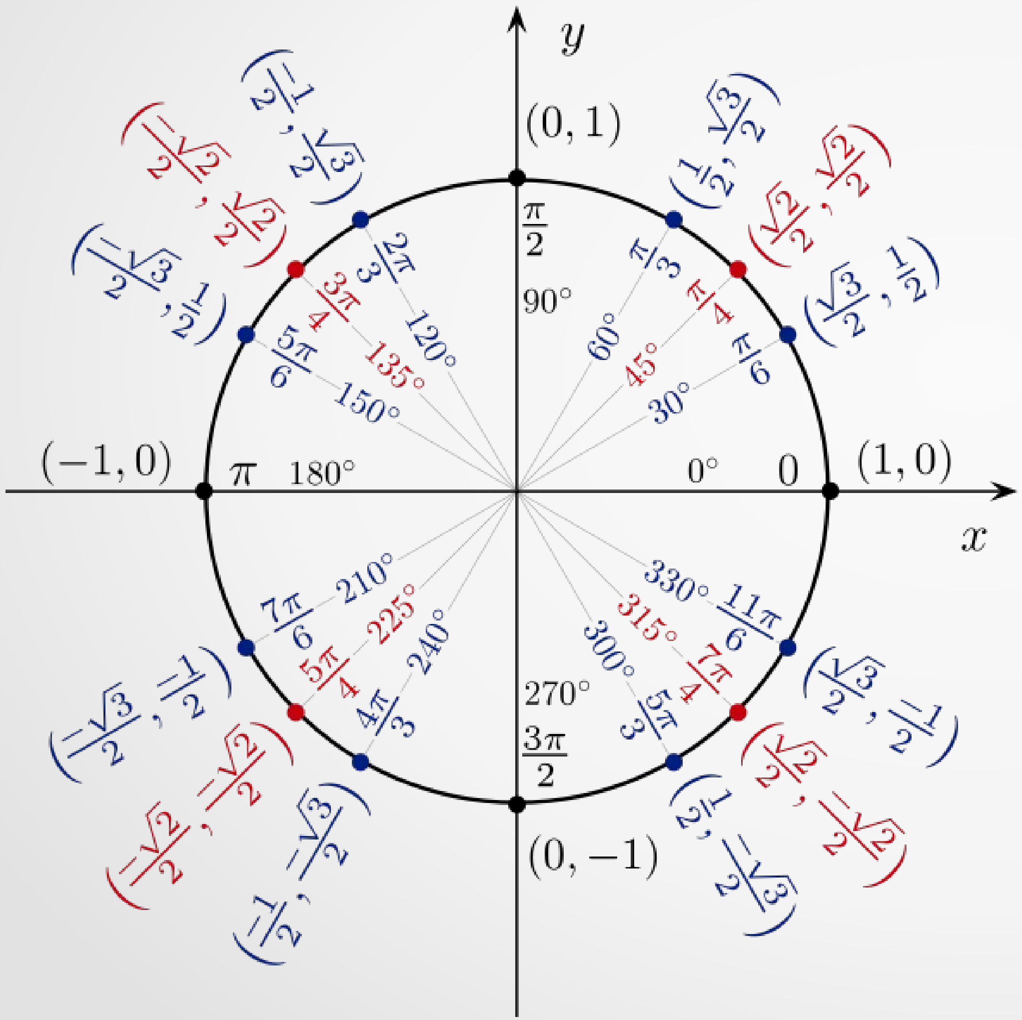
Studio di funzioni

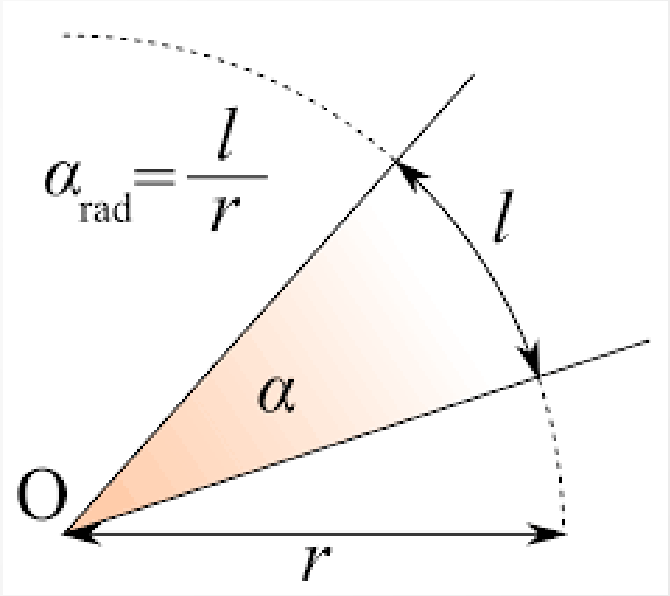
Angoli e radianti : l’angolo e’ una parte di piano ottenuta tracciando, a partire da un punto, due semirette aventi la stessa origine, Cosi’ facendo si divide il piano in due parti dette appunto angoli, caratterizzate quindi da una certa ampiezza



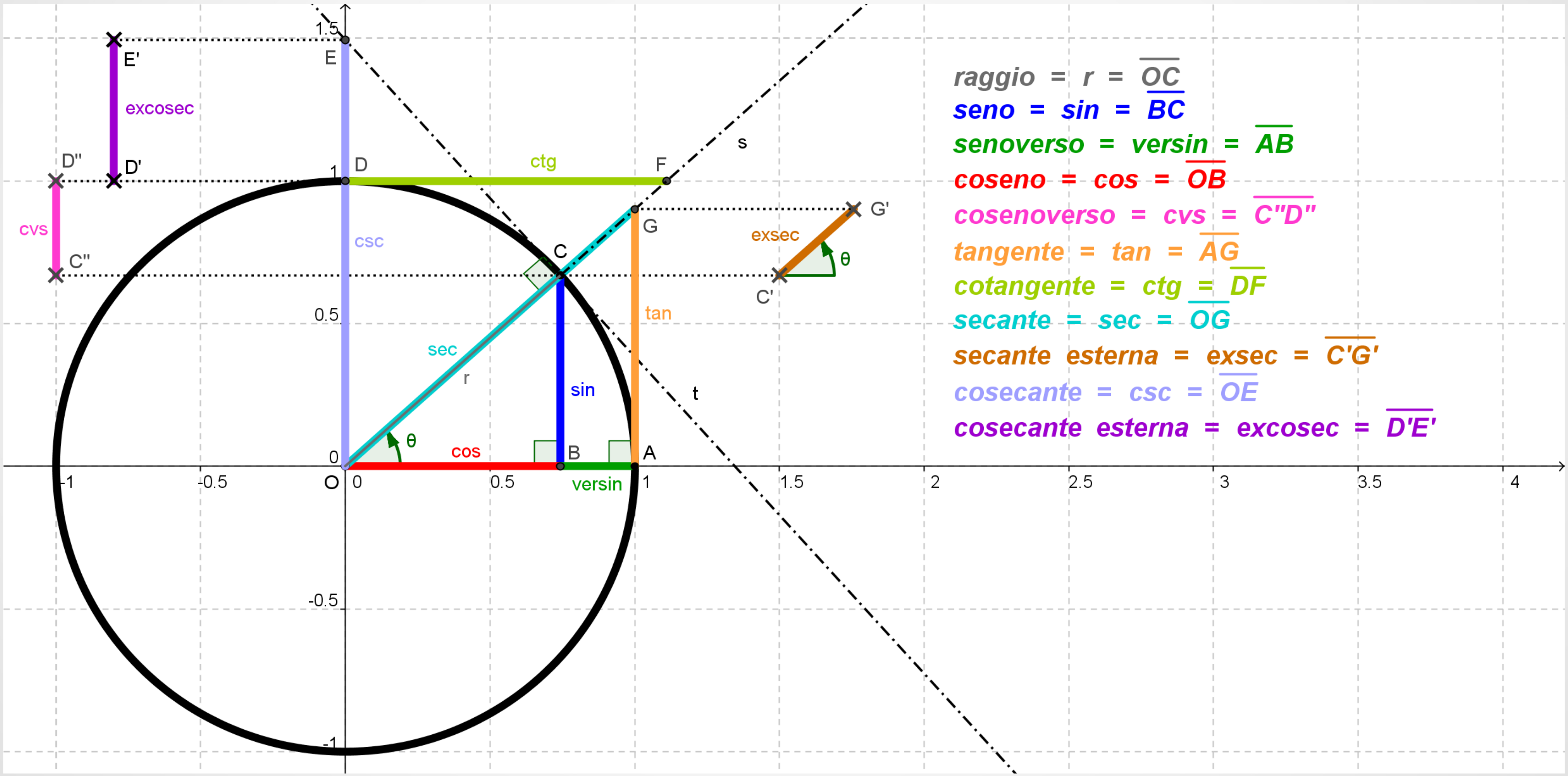
Si definisce una misura dell’angolo usando ad esempio i gradi , un grado e’ definito come la 360-esima parte di un angolo giro

Studio di funzioni





Studio di funzioni

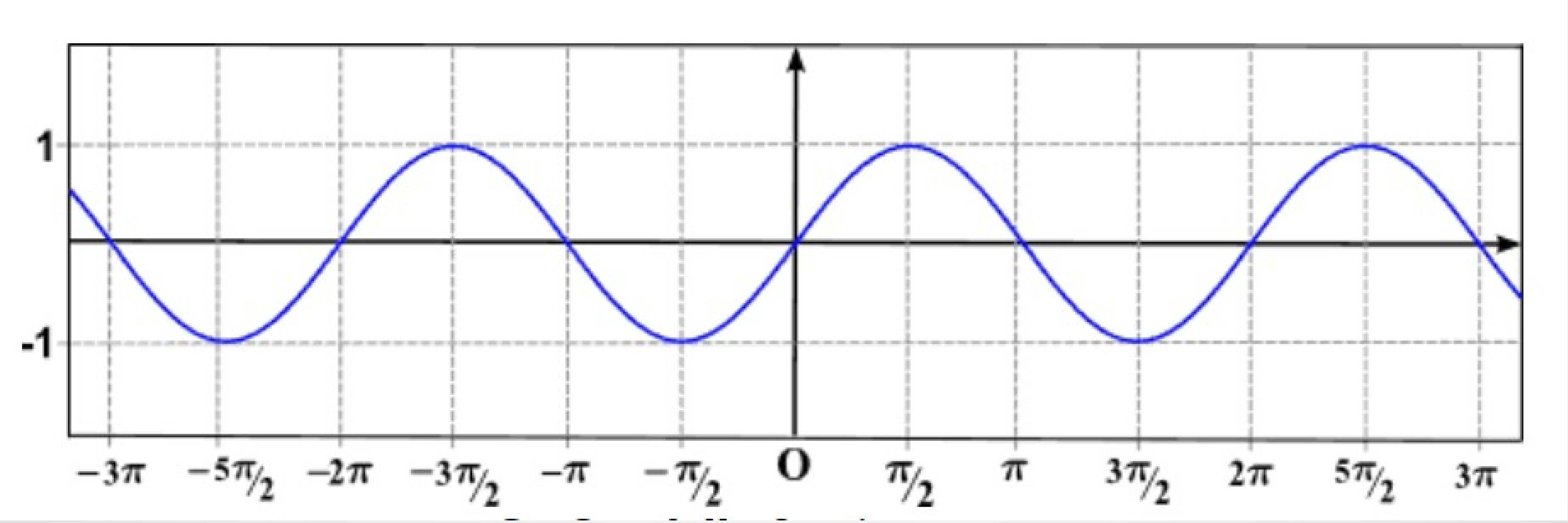


In matematica, le funzioni trigonometriche o funzioni goniometriche o funzioni circolari sono funzioni di un angolo

Studio di funzioni

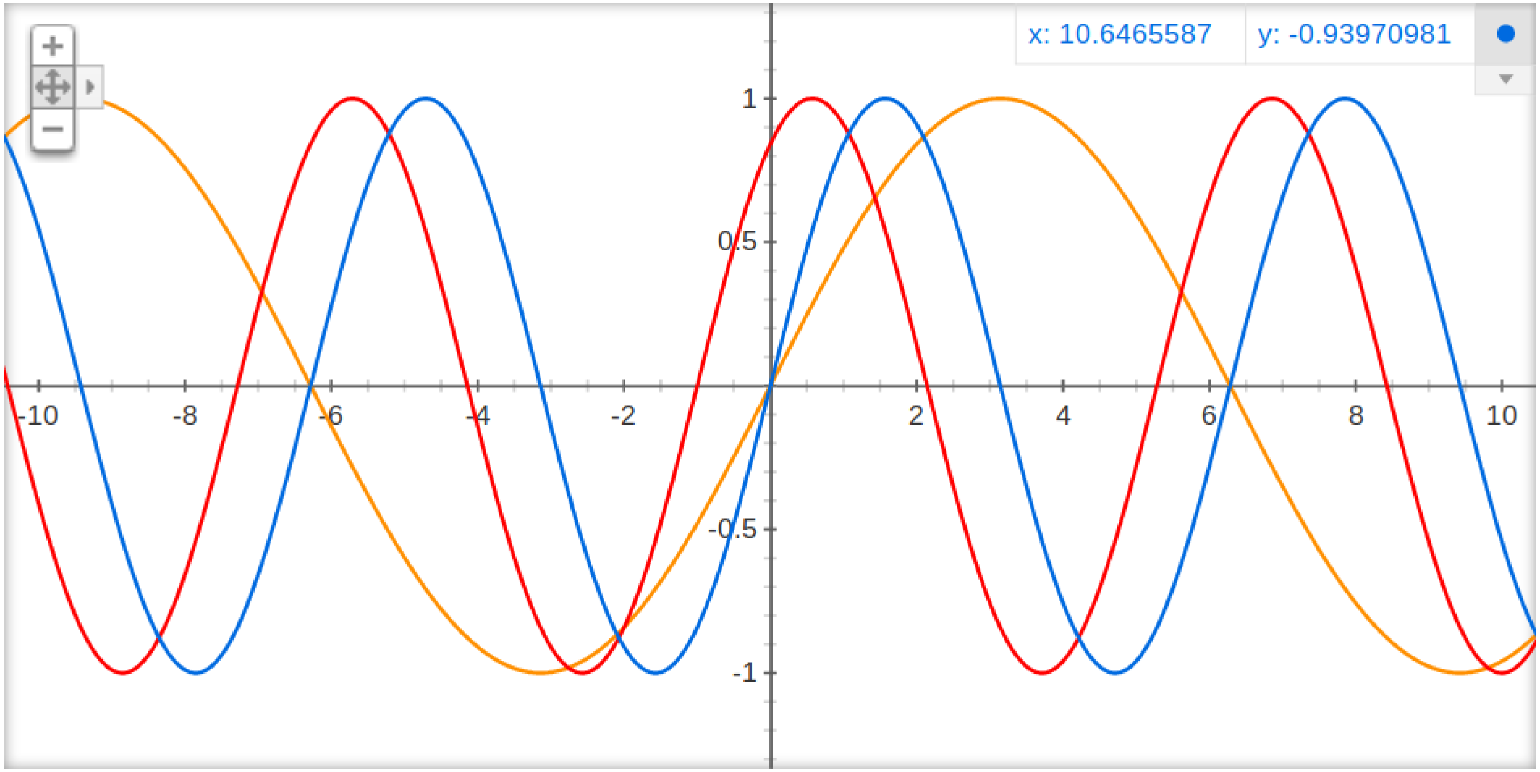
$$\sin(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$x \mapsto \sin(x)$$



Studio di funzioni

Graph for sin(x), sin(x+1), sin(0.5*x)

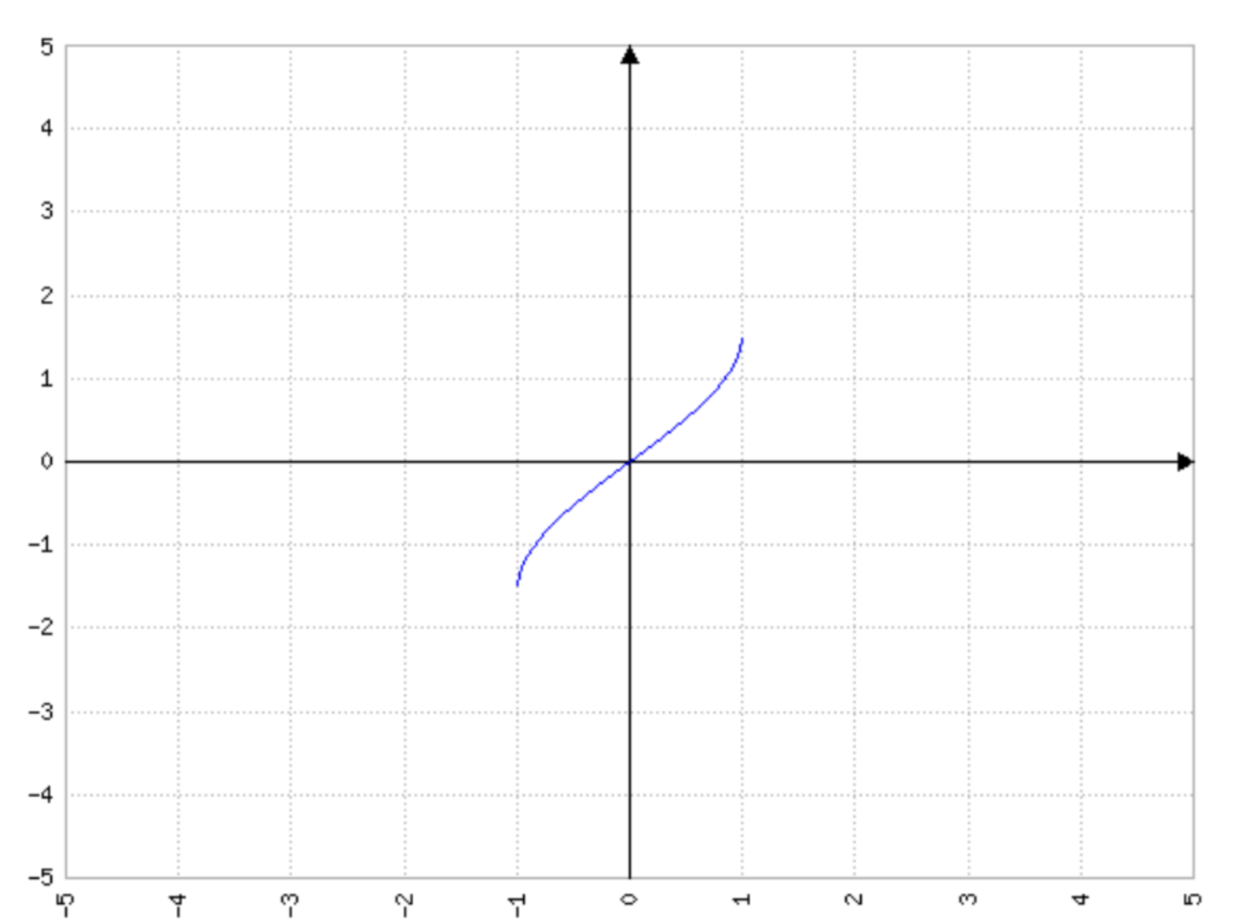


More info

Studio di funzioni

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

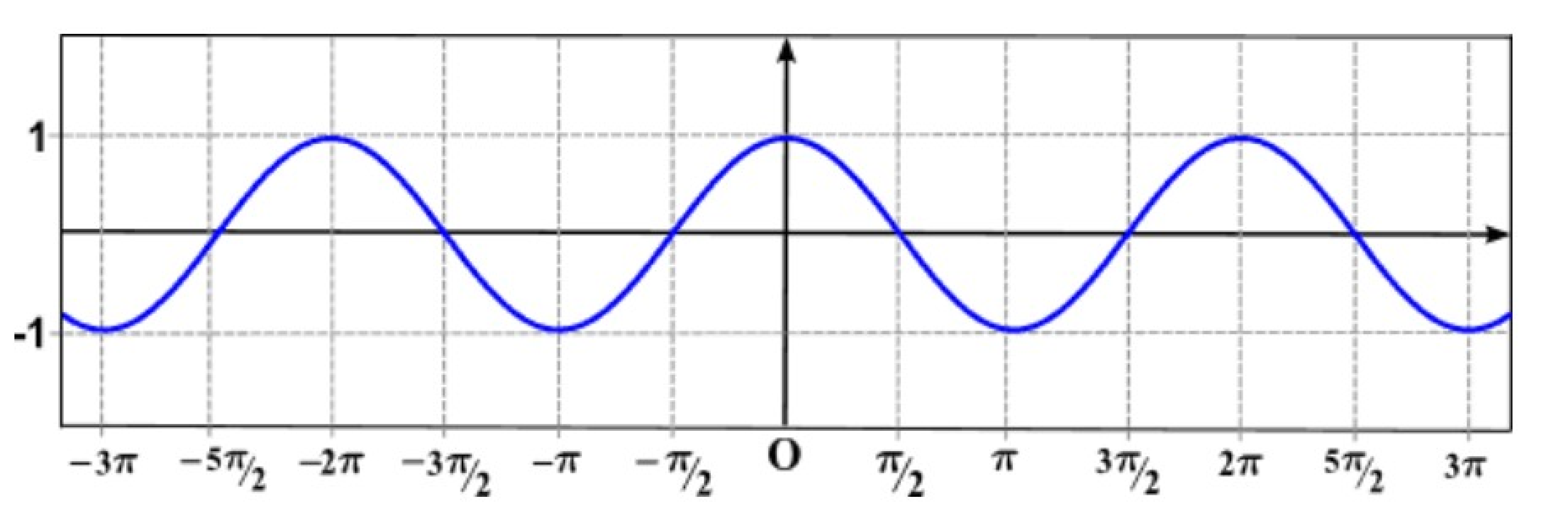
$$x \mapsto \arcsin(x)$$



Studio di funzioni

$$\cos(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$x \mapsto \cos(x)$$

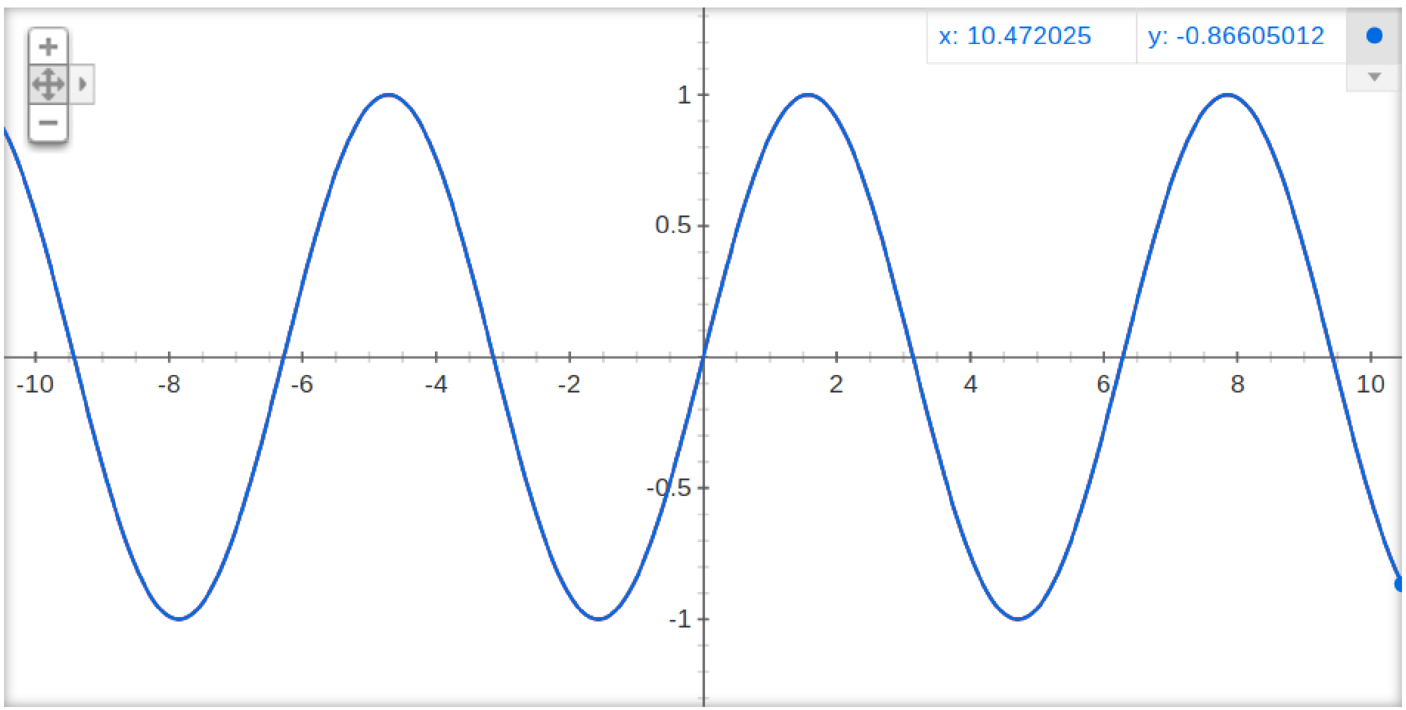


Studio di funzioni

Google

plot sin(x), cos(x-pi/2)

Graph for sin(x), cos(x-π/2)



More info

Studio di funzioni

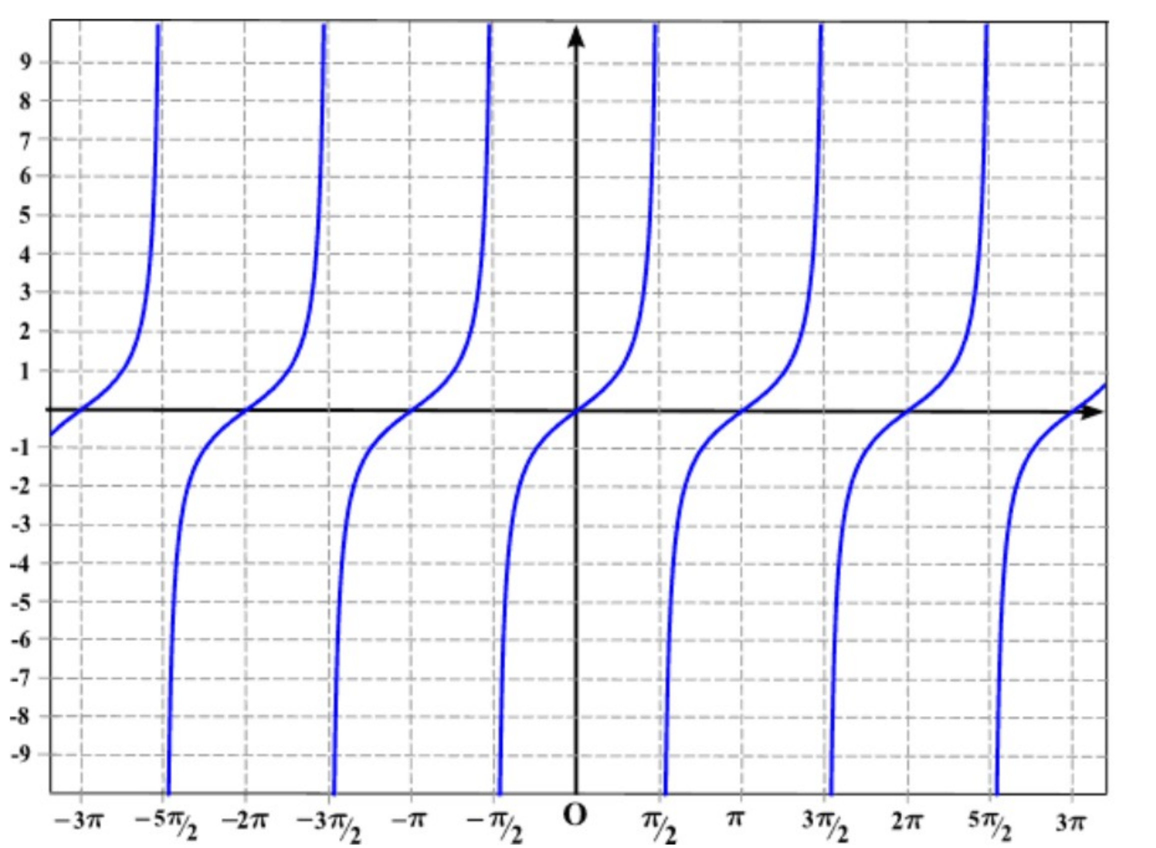
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$x \mapsto \arccos(x)$$

Studio di funzioni

$$\tan(x) : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

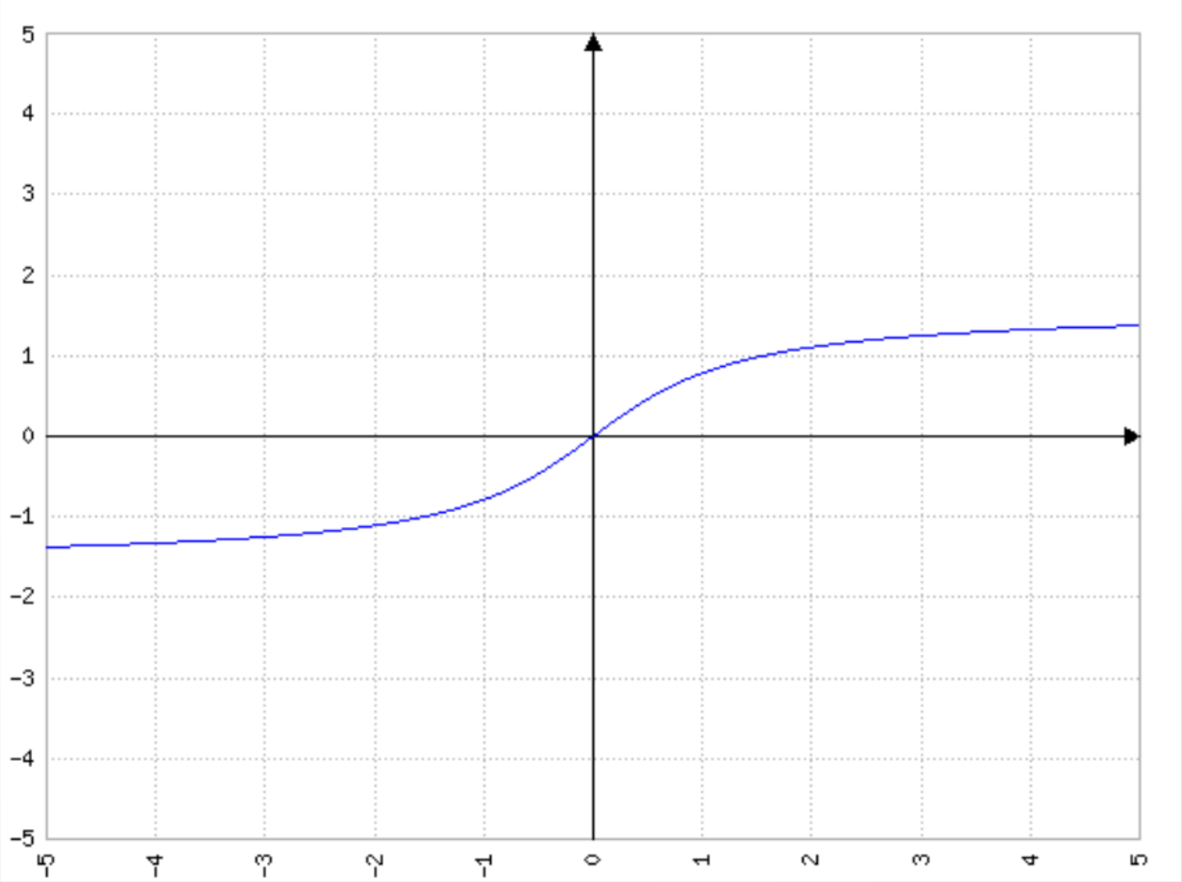


Studio di funzioni

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \mapsto \arctan(x)$$

Dobbiamo restringere l'insieme di definizione visto che la funzione tangente è una funzione suriettiva ma non iniettiva



Studio di funzioni

$$\cot(x) : \mathbb{R} - \{k\pi\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$